2019 年度 大阪府公立高校入試問題　数学 C（解答例）

1

次の問いに答えなさい。

(1)$x = 5 - 2\sqrt{3}$ のとき、

$x^2 - 10x + 2$

$= (5 - 2\sqrt{3})^2 - 10(5 - 2\sqrt{3}) + 2$

$= 25 - 20\sqrt{3} + 12 - 50 + 20\sqrt{3} + 2 = -11$

(2)$x - y + 1 = 3x + 7 = -2y$

$x - y + 1 = -2y, 3x + 7 = -2y$

$x = -y - 1, 3x + 2y = -7$

$3(-y - 1) + 2y = -7$

$-y - 3 = -7$

$y = 4$

$x = -4 - 1 = -5$

(3)$(a + 2b)^2 + a + 2b - 2$

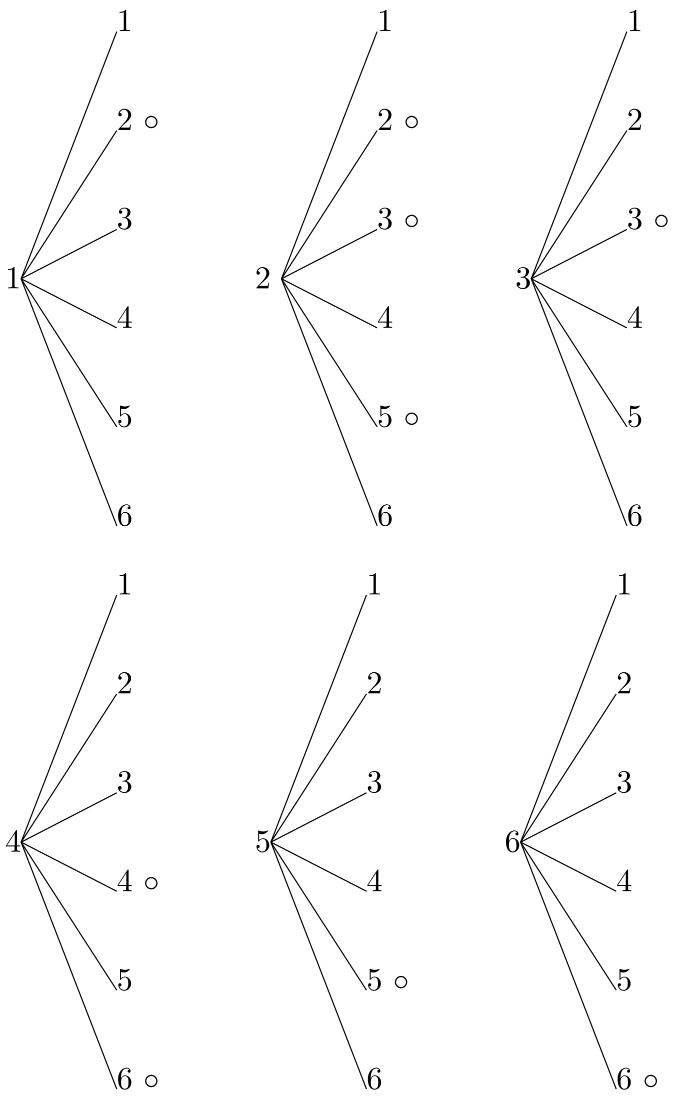
$= (a + 2b + 2)(a + 2b - 1)$

(4)$\sqrt{31}, \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}, 5.5$ の大小

$\sqrt{31}^2 = ()^2 = 31, (4\sqrt{2})^2 = 32, 5.5^2 = 30.25$

より、㋔ $5.5 < \sqrt{31} < \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

(5) 2つのさいころ（確率）



左を a 右を b とする。

$\dfrac{2b}{a}$ が素数となるのは

○印のあるところだから

$\dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

(6)

初めに入っていた黒色の碁石の個数を r、全個数を x とすると

題意より

初めの抽出、$\dfrac{r}{x} = \dfrac{32}{40}$ より

$x = \dfrac{40}{32}r$

再抽出、$\dfrac{r}{x+100} = \dfrac{28}{40}$

と考えられるから

$40r = 28x + 2800 = 28 \times \dfrac{40}{32}r + 2800$

$40r - \dfrac{28 \times 40}{32}r = 2800$

$\dfrac{40 \times 32r - 28 \times 40}{32}r = 2800$

$(40 \times 32 - 28 \times 40)r = 2800 \times 32$

$40 \times (32 - 28)r = 2800 \times 32$

$r = \dfrac{2800 \times 32}{40 \times 4}$

となり

$r = 70 \times 8 = 560$ (個)

(7)

題意より

b を $2m+3$、a を $2m+1$ とし、k を自然数とすると、

$b^2 - a^2$

$= (2m+3)^2 - (2m+1)^2$

$= (4m^2 + 12m + 9 - (4m^2 + 4m + 1)$

$= 8m + 8 = 100k$

$= 2m + 2 = 25k$

これより、k は 2 の倍数だが、$k = 4$ で $b > 100$ となるので、

$k = 2$ よって、

$2m + 2 = 25 \times 2 = 50$ だから

$m + 1 = 25$

$m = 24$

$a = 2 \times 24 + 1 = 49$

$b = 2 \times 24 + 3 = 51$

(8)

t の値を求めなさい。

C の x 座標を u $(u>0)$ とおくと

$A(t,3t+2), B(t,0), C\left(u,\dfrac{1}{8}u^2\right), D\left(-u,\dfrac{1}{8}u^2\right), E\left(t,\dfrac{1}{8}u^2\right), F(u,0)$

題意から、

$t-(-u)=3t+2$

$u=2t+2$

あらためて、$C\left(2t+t,\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}\right)$

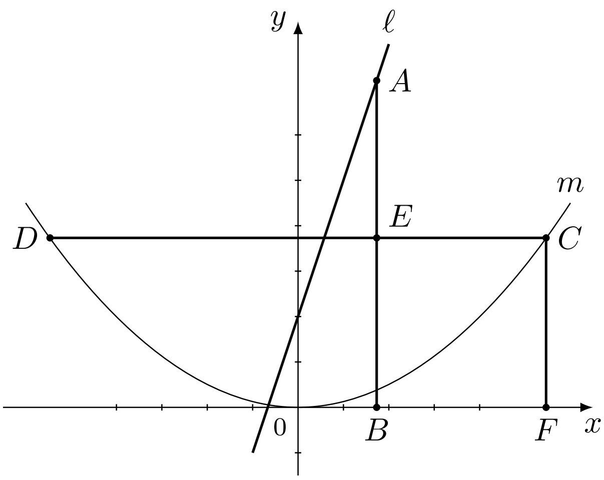
$CF=CE$ より、

$\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}=2t+2-t=t+2$

$\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}-2=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{3}{2}=0$

$t^2-3=0$

$t>0$ だから、$t=\sqrt{3}$



2

$BC = 8\text{cm}, \angle BAC = 90^\circ, CD = CA$

(1) 半周より短い弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さ $\angle AOB = a$ を用いて表す。

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 8\pi \times \frac{a}{360}$$
$$= \frac{1}{45}\pi a \text{ cm}$$

(2)$FO = FC$ の証明

$\angle CAD = \angle CDA \ (AC = CD)$

$\angle FCO = \angle CAD + \angle CDA = 2\angle CAD$ ($\triangle ACD$ の外角)$\cdots$①

$\angle CAE = \angle BEO$ ($\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$ の円周角)$\cdots$②

$\angle CBE = \angle BEO$ ($BO = EO$ 半径)

$\angle FOC = \angle OBE + \angle BEO$ ($\triangle BOE$ の外角)

$= 2\angle CAE$ (②)$\cdots$ ③

①,②より

$\angle FCO = \angle FOC$

だから、$\triangle CFO$ は点 F を頂点とする二等辺三角形

ゆえに、$FO = FC$

(3)

$AC = 6$ cm であるとき

①線分 FC の長さ

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 6 = 6\sqrt{7}$

点 F から辺 OC に垂線を引き、その交点を H

とすると $\angle CHF = \angle BAC = 90^\circ$,

$\angle FCH = \angle BCA$(共通) より

$\triangle ABC \backsim \triangle HFC$

$HC = 2$ だから

$AB : HF = AC : HC$

$2\sqrt{7} : HF = 6 : 2$

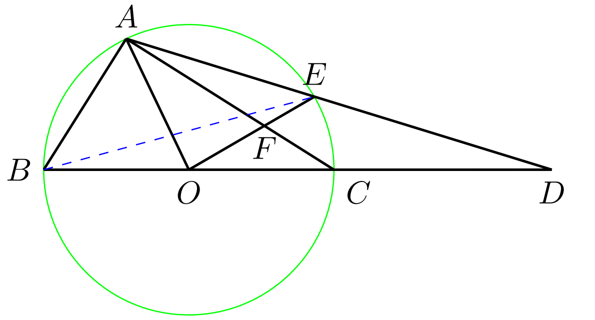
$HF = \frac{2 \times 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

ゆえに、$FC = \sqrt{HF^2 + HC^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{\frac{4 \times 7}{9} + \frac{36}{9}}$

$= \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$ cm

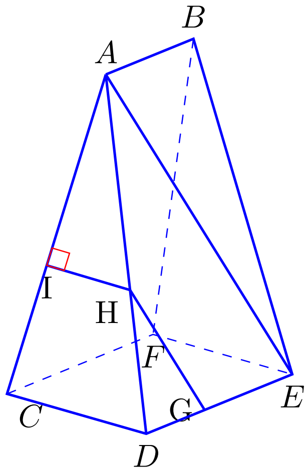


②$\triangle AOF$ の面積

点 A から辺 BC に垂線を引き、その交点を G とすると
(AG は $\triangle ABC$ の高さ)
$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AG = 6\sqrt{7}$ より
$\frac{1}{2} \times 8 \times AG = 6\sqrt{7}$
$AG = \frac{6}{4} \times \sqrt{7} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$
だから
$\triangle AOF = \triangle AOC - \triangle FOC$
$= \frac{1}{2} \times OC \times AG - \frac{1}{2} \times OC \times HF$
$= \frac{1}{2} \times OC \times (AG - HF)$
$= \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7}\right)$
$= \frac{5}{3}\sqrt{7}\ \mathrm{cm}^2$

3

$AC = AD = BE = BF = 8\mathrm{cm}, AB = 3\mathrm{cm}, CD = EF = 4\mathrm{cm}, DE = CF = 5\mathrm{cm}$
四角形 $ACFB \equiv$ 四角形 $ADEB$ ($AB \parallel DE$ の台形)
①$\triangle AEB$ の面積



台形 $ADBE$ の高さ h
点 A から辺 DE に垂線を引き、その交点を J とすると
$AJ = \sqrt{AD^2 - 1^2} = \sqrt{8^2 - 1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ だから
$\triangle AEB = \frac{1}{2} \times AB \times AJ$
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{7}$
$= \frac{9}{2}\sqrt{7}\ (\mathrm{cm}^2)$

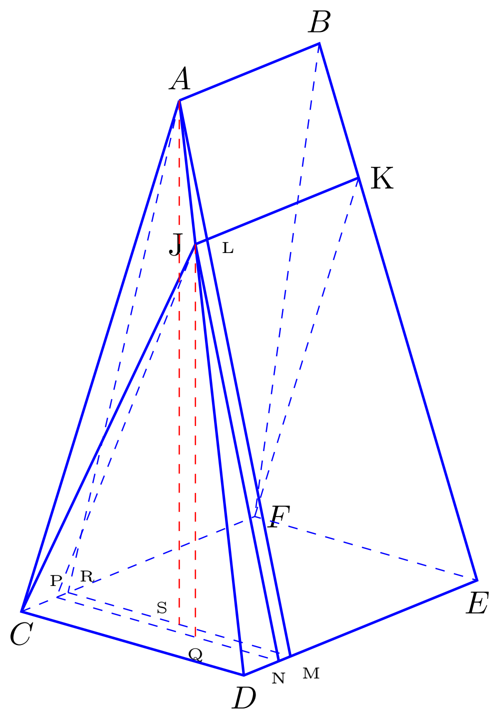
②線分 AH の長さ

$AH = AD \times \frac{3}{5} = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}\ \mathrm{cm}$

③線分 IH の長さ

点 A から辺 CD に垂線を引き、その交点を J とすると
$AJ=\sqrt{AC^2-CJ^2}=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$
点 D から辺 AC に垂線を引き、その交点を K とすると
KD と AJ は $\triangle ABC$ の面積の一致により、
$\frac{1}{2}\times CD\times AJ=\frac{1}{2}\times AC\times DK$ から
$\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{15}=\frac{1}{2}\times 8\times DK$
$DK=\sqrt{15}$
また、
$\angle IAH=\angle CAD$ (共通),$\angle HIA=\angle DKA=90^\circ$ だから
$\triangle IAH \backsim \triangle KAD$, よって
$AH:AD=IH:DK$
$\frac{24}{5}:8=IH:\sqrt{15}$ だから
$IH=\frac{24\sqrt{15}}{5\times 8}=\frac{3\sqrt{15}}{5}$ cm

(2) $AJ=BK=2$cm
①線分 JK の長さ



点 A から辺 JK,DE に垂線を引き、それぞれの交点を
L,M とすると $\angle JAL=\angle DAM$ (共通),
$\angle ALJ=\angle AMD=90^\circ$ だから
$\triangle ALJ \backsim \triangle AMD$, よって
$JL:DM=AJ:AD$ だから
$JL:1=2:8$
$JL=\frac{1\times 2}{8}=\frac{1}{4}$
これは、JK の J 側で、3cm をはさんで同様に K 側
にも同じ長さがあるから
$JK=\frac{1}{4}+3+\frac{1}{4}=3+\frac{1}{2}$
$=\frac{7}{2}$ (cm)

②立体 $JK-CDEF$ の体積 (V)

点 J から辺 DE,CF に垂線を引き、それぞれの交点を N,P とする。
①と同様に考えて、$DN=CP=\frac{3}{4}$、これより
立体 $JK-CDEF$ は、点 J を頂点とする四角錐 $J-CDNP$ を含む、それと同じ体積の四角錐 2 つで三角柱 1 つをはさんで構成されることがわかる。そこで、点 J から辺 NP に垂線を引き、
その交点を Q とすると、JQ が四角錐 $J-CDNP$ の高さである。
一方、点 A から辺 CF に垂線を引き、その交点を R とし、
さらに点 A から辺 RM に垂線を引き (M は①)、
その交点を S すると、
$\triangle JQN \backsim \triangle ASM$ また、$\triangle JND \backsim \triangle AMD$
これと、$AS=\sqrt{AM^2-MS^2}=\sqrt{(AD^2-DM^2)-MS^2}$
$=\sqrt{(8^2-1^2)-2^2}=\sqrt{59}$ より
$JQ:AS=JN:AM=JD:AD=6:8$
$JQ:\sqrt{59}=6:8$
$JQ=\frac{6\sqrt{59}}{8}=\frac{3}{4}\sqrt{59}$
よって、
$V=2\times\frac{1}{3}\times CD\times DN\times JQ+\frac{1}{2}\times RM\times JQ\times(DE-2\times DN)$
$=2\times\frac{1}{3}\times 4\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\sqrt{59}+\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{4}\sqrt{59}\times JK$
$=\frac{3}{2}\sqrt{59}+\frac{1}{2}\times 3\sqrt{59}\times\frac{7}{2}$
$=\frac{27}{4}\sqrt{59}\ (\mathrm{cm}^3)$